Nombres de KEITH

Par M. DOFAL
IA-IPR mathématiques

Solution de l'exercice 197.

Ce qui est attendu des élèves de troisième ou de seconde est essentiellement une exploration systématique de tous les nombres à deux chiffres, permettant de faire émerger les six nombres 14, 19, 28, 47, 61, 75 .

Afin d'éclairer le professeur sur les ressorts de cet exercice il est proposé l'étude ci-dessous.

Cas des nombres à deux chiffres.

On note F_0, F_1, F_2 etc les termes de la suite de Fibonnacci 0,1,1,2,3,5,8, etc
La suite U constituée à partir d'un nombre à deux chiffres u_0u_1 appartient à l'espace vectoriel des suites « doublement récurrentes » ($U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ avec les conditions initiales $U_0 = u_0$ et $U_1 = u_1$). La théorie de ces suites permet de montrer assez facilement qu'elles constituent un sous espace à deux dimensions de l'ev des suites numériques. On recherche alors classiquement deux suites indépendantes qui en constituent alors une base.
On peut chercher des suites du type r^n .
Mais dans le cas présent il est plus intéressant de choisir la suite S déterminée par 1, 0 et la suite T déterminée par 0, 1. Ces deux suites sont linéairement indépendantes et constituent une base de l'espace considéré.
Les termes succesifs de S : 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc
Et ceux de la suite T : 0, 1, 1, 2,3,5,8, 13, etc
On a tout simplement pour $k>0$ $S_k = F_{k-1}$ et $T_k = F_k$. $S_0=1$, $T_0=0$
Par conséquent toute suite solution W est telle qu'il existe deux réels a et b tels que pour $k>0$ $W_k = a\,S_k + b\,T_k$ $(= a\,F_{k-1} + b\,F_k)$, les scalaires a et b étant déterminés par les conditions initiales .
Si l'on part du nombre U_0U_1 on devra avoir $W_0 = U_0 = a\,S_0 = a$ et $W_1 = U_1 = aS_1 + bT_1 = b$.
Ainsi la suite W s'écrit pour $k>0$ $W_k = U_0\,F_{k-1} + U_1\,F_k$ et $W_0 = U_0$, $W_1 = U_1$

Rechercher s'il existe un rang k tel que le nombre U_0U_1 réapparaisse conduit à résoudre l'équation en k : $W_k = 10\,U_0 + U_1$ dans laquelle **U_0 et U_1 sont compris entre 0 et 9.**
Cette équation se transforme en $U_0\,F_{k-1} + U_1\,F_k = 10\,U_0 + U_1$.
Ou encore $\boldsymbol{U_1\,(F_k - 1) = U_0\,(10 - F_{k-1})}$
On est ainsi amené à examiner les valeurs de la suite de Fibonnacci inférieures à 10 (k est nécessairement inférieur à 7 pour que $(10 - F_{k-1})$ soit >0) .
Se présentent alors les cinq équations du tableau ci-dessous

$(F_k - 1)$	$(10 - F_{k-1})$	*Equation*	U_0	U_1	*Nombre de départ*
12	*2*	$12\,U_1 = 2\,U_0$	*6*	*1*	***61***
7	*5*	$7\,U_1 = 5\,U_0$	*7*	*5*	***75***
4	*7*	$4\,U_1 = 7\,U_0$	*4*	*7*	***47***
2	*8*	$2\,U_1 = 8\,U_0$	*1* *2*	*4* *8*	***14*** ***28***
1	*9*	$U_1 = 9\,U_0$	*1*	*9*	***19***
0	*10*	$0 = 10\,U_0$	*0*	*u*	***0u***

Etude d'une variante :

Il est facile, pendant qu'on y est de chercher si l'on peut obtenir « le nombre de départ inversé » cette fois, c'est-à-dire que partant de U_0, U_1 on arrive à U_1U_0
Cette fois, il s'agit de résoudre l'équation :
$\boldsymbol{U_0\,F_{k-1} + U_1\,F_k = U_0 + 10\,U_1}$ **c'est à dire** $\boldsymbol{U_1\,(10 - F_k) = U_0\,(F_{k-1} - 1)}$.

Un travail analogue au précédent donne alors les résultats suivants:

(10 - F_k)	*(F_{k-1} -1)*	*Equation*	*U_0*	*U_1*	*Nombre de départ*
2	4	$U_1 = 2\,U_0$	1 2 3 4	2 4 6 8	**12** **24** **36** **48**
5	2	$5\,U_1 = 2\,U_0$	5	2	**52**
7	1	$7\,U_1 = U_0$	7	1	**71**
8	0	$8\,U_1 = 0\,U_0$	*u*	0	***u* 0**

Cas des nombres à trois chiffres

Cette fois il s'agit des suites du type : $U_{n+2} + U_{n+1} + U_n = U_{n+3}$ les données initiales étant $U_0 = u_0$ et $U_1 = u_1$ et $U_2 = u_2$ correspondant au nombre à trois chiffres $u_0u_1u_2$.
La théorie analogue montre cette fois l'existence d'un espace à trois dimensions dont une base est constituée par exemple par les trois suites
S : 1, 0, 0, 1, 1, 2, ….
T : 0, 1, 0, 1, 2, 3, 6, 11,
U : 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13. …
Toute suite solution *W* étant telle que $W_k = u_0 S_k + u_1 T_k + u_2 U_k$.
La suite S joue le rôle joué par *F* précédemment :
On observe (et on montre facilement) que $U_k = S_{k+1}$ *et que* $T_k = S_{k+2} - S_{k+1}$
Ainsi $W_k = u_0 S_k + (u_2 - u_1)\, S_{k+1} + u_1 S_{k+2}$
Rechercher s'il existe un rang k tel que le nombre le nombre à trois chiffres u_0 u_1 u_2 réapparaisse conduit à résoudre l'équation :
$\boldsymbol{u_0 S_k + (u_2 - u_1)\, S_{k+1} + u_1 S_{k+2} = 100\, u_0 + 10\, u_1 + u_2}$ **qui s'écrit encore :**

$\boldsymbol{u_1\,(S_{k-1} + S_k - 10) + u_2\,(S_{k+1} - 1) = u_0\,(100 - S_k)}$ **(car $\boldsymbol{S_{k-1} + S_k = S_{k+2} - S_{k+1}}$)**
Dans laquelle u_0 , u_1 , u_2 sont des chiffres.
Compte tenu du comportement de S il apparaît que nécessairement k ≤11 pour **100 - S_k >0**
et que *k* ≥*7* pour que $S_{k-1} + S_k \geq 10$
Il y a donc à examiner les cinq équations à inconnues entières u_0, u_1, u_2 dans [0 ; 9]

k =	*( )* u_1	*+ ( )* u_2	*= ( )* u_0	*Solution* u_0, u_1, u_2
7	1	12	93	*Solution* ***1, 9, 7*** *(la seule)*
8	10	23	87	
9	27	43	76	
10	58	80	56	*Solution* ***7, 4, 2*** *(la seule)*
11	115	148	19	

Le travail d'analyse des trois autres équations est un peu fastidieux pour arriver à montrer qu'elles n'ont pas de solutions.

Ainsi parmi les nombres à trois chiffres seuls 197 et 742 possèdent la propriété.

Ces nombres sont connus sous le nom de nombres de Keith .

Voici ceux à quatre chiffres :

1 104	**1 537**	**2 208**	**2 580**	**3 684**	
	4 788	**7 385**	**7 647**	**7 909**	
Voir par exemple :	**http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Iteration/Keith.htm**				