Des éléments de corrigé du sujet des Olympiades 2020
Sujets académiques

Exercice académique 1

***PARTIE A* : « Jouons avec la graine ».**

1. *Indice 1 : 1* *Indice 2 : 11* *Indice 3 : 21* *Indice 4 : 1211*
   Indice 5 : 111221 *Indice 6 : 312211* *Indice 7 : 13112221*
   Indice 8 : 1113213211 *Indice 9 : 31131211131221* *Indice 10 : 13211311123113112211*
2. *Indice 1 : 0* *Indice 2 : 10* *Indice 3 : 1110*
   Indice 4 : 3110 *Indice 5 : 132110* *Indice 6 : 1113122110*
3. *Indice 1 : 42* *Indice 2 : 1412* *Indice 3 : 11141112* *Indice 4 : 31143112*
   Indice 5 : 132114132112 *Indice 6 : 1113122114111312211 2*
4. *Oui, la graine 22 donne une suite constante, tous les termes seront égaux à 22.*

PARTIE B: Quelques démonstrations avec la graine 1.

1. *Le chiffre 4 semble ne pas pouvoir être obtenu dans la suite de Conway de graine 1.*
2.
   a. *Il est nécessaire d'avoir soit 1111 soit 2222 soit 3333.*
   b. Expliquez clairement en n'oubliant pas que 1111 peut apparaitre sous la forme (a1)(11)(1b). *Prenons par exemple le cas où l'on a obtenu 211112 à l'étape n. Etudions toutes les façons possibles d'obtenir cette séquence. Pour cela il faut étudier les paires possibles et leurs antécédents*

	(21)(11)(13)	*..2)(11)(11)(3..*
Antécédents	*(11)(1)(3)*	*..2)(1)(1)(…*
	Impossible *111 s'écrira 31 à l'étape suivante*	*Impossible* *11 s'écrira 21 à l'étape suivante*

Les autres séquences 311113 et 311112 mènent à des raisonnements similaires.

   c. *Prenons par exemple le cas où l'on a obtenu 12221 à l'étape n. Etudions toutes les façons possibles d'obtenir cette séquence. Pour cela il faut étudier les paires possibles et leurs antécédents*

	(12)(22)(21)	*..1)(22)(22)(1..*
Antécédents	*(2)(22)(11)*	*..1)(22)(22)(…*
	Impossible *222 s'écrira 32 à l'étape suivante*	*Impossible* *2222 s'écrira 42 à l'étape suivante* *(Et cela contredit aussi que n est le premier rang d'apparition d'un 4)*

Les autre séquences 12223, 322221 et 322223 mènent à des raisonnements similaires.

   d. *Prenons par exemple le cas où l'on a obtenu 133331 à l'étape n*
   Etudions toutes les façons possibles d'obtenir cette séquence.
   Pour cela il faut étudier les paires possibles et leurs antécédents

	(13)(33)(31)	*..1)(33)(33)(1..*
Antécédents	*(3)(333)(111)*	*..1)(333)(333)(…*
	Impossible *3333 s'écrira 43 à l'étape suivante*	*Impossible* *333333 s'écrira 63 à l'étape suivante*

Les autre séquences 133332, 233331 et 233332 mènent à des raisonnements similaires.

e. *Il n'est donc pas possible d'obtenir un chiffre 4 avec la suite de Conway de graine 1.*

3.

a. $T_{10}=1, D_{10}=5, S_{10}=7, C_{10}=20$ et $C_9=14$

b. Chaque singleton compte pour 1 chiffre, chaque doublet compte pour 2 chiffres et chaque triplet compte pour 3 chiffre, d'où la formule : $C_n=3T_n+2D_n+S_n$

c. *Les triplets donneront une paire de chiffres, aaa donnera 3a*

d. *Les doublets donneront une paire de chiffres, aa donnera 2a. Les singletons donneront une paire de chiffres, a donnera 1a*

e. *A l'étape* n *il n'y a que des triplets, doublets et singletons car il ne peut pas y avoir de chiffre 4 (ou supérieur). Or chacun d'eux va générer des paires de chiffres. Ainsi :* $C_{n+1}=2T_n+2D_n+2S_n$

f. *D'après la formule précédente, le nombre de termes à l'étape n+1 est pair car multiple de 2.*

4. *Prenons par exemple le cas où l'on a obtenu a333b à l'étape n et c'est le premier rang d'apparition d'une telle séquence.*
Etudions toutes les façons possibles d'obtenir cette séquence.
Pour cela il faut étudier les paires possibles et leurs antécédents

	(a3)(33)(3b)	*..a)(33)(3b)(..*
Antécédents	*(..3)(333)(bbb)*	*..a)(333)(bbb)(…*
$c\geq 4$	*Impossible* *…3333 s'écrira c3 avec à l'étape suivante*	*Impossible* *Voir ci-dessous*

Montrons que de telles séquences sont impossibles à obtenir.
Prenons le cas de 333111

	(a3)(33)(11)(1b)	*..a)(33)(31)(11)(b..*
Antécédents	*(..3)(333)(1)(b)*	*..a)(333)(111)(1)(…*
$c\geq 4 c\geq 4$	*Impossible* *…3333 s'écrira c3 avec à l'étape suivante*	*Impossible* *3331111 s'écrira 33c1 avec*

L'autre cas : 333222 se traite de la même manière.

Exercice 2 : spécialité

I Ecriture binaire

$4=0\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0$ donne 0100 $8=1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0$ donne 1000

$9=1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0$ donne 1001 $15=1\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0$ donne 1111

II En route vers le bibinaire

1. 11 s'écrit 1011 donc $\mathrm{KI}_{(bibi)}$ 03 s'écrit 0011 donc $\mathrm{HI}_{(bibi)}$
2020 s'écrit $\mathrm{BIDEBO}_{(bibi)}$ 11/03/2020 s'écrit $\mathrm{KI}_{(bibi)}$ / $\mathrm{HI}_{(bibi)}$ / $\mathrm{BIDEBO}_{(bibi)}$

HO	HA	HE	HI	BO	BA	BE	BI	KO	KA	KE	KI	DO	DA	DE	DI
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2. a) $\mathrm{KADO}_{(bibi)}$: $\mathrm{KADO}_{(bibi)}=\mathrm{KA}_{(bibi)}\times 16^1+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times 16^0$ s'écrit $9\times 16^1+12\times 16^0=156$

$\mathrm{DEBIBI}_{(bibi)}$: $\mathrm{DEBIBI}_{(bibi)}=\mathrm{DE}_{(bibi)}\times 16^2+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times 16^1+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times 16^0=14\times 16^2+7\times 16^1+7\times 16^0=3703$

b. $\mathrm{KADODEBIBI}_{(bibi)}$

$\mathrm{KA}_{(bibi)}\times 16^4+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times 16^3+\mathrm{DE}_{(bibi)}\times 16^2+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times 16^1+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times 16^0$ soit

$156\times 16^2+3703$ ou $9\times 16^4+12\times 16^3+14\times 16^2+7\times 16^1+7\times 16^0=642679$

3. a. $\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$

$\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}=10+6=16=1\times 16^1$ donc $\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{DE}_{(bibi)}=\mathrm{HAHO}_{(bibi)}$

$\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$

$\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}=15+6=16+5=1\times 16^1+5\times 16^0=\mathrm{HABA}_{(bibi)}$ donc

$\mathrm{HAHO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}=1\times 16^1+0\times 16^0+1=1\times 16^1+1\times 16^0=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}$

donc $\mathrm{HAHO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}$

b. $\mathrm{KEDI}_{(bibi)}+\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{KE}_{(bibi)}\times 16^1+\mathrm{DI}_{(bibi)}\times 16^0+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times 16^1+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times 16^0$

$=(\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)})\times 16^1+(\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)})\times 16^0$

$=\mathrm{HAHO}_{(bibi)}\times 16^1+\mathrm{HABA}_{(bibi)}\times 16^0$

$=\mathrm{HA}_{(bibi)}\times 16^2+(\mathrm{HO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)})\times 16^1+\mathrm{BA}_{(bibi)}\times 16^0$

donc $\mathrm{KEDI}_{(bibi)}+\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{HAHABA}_{(bibi)}$

III. Nombres bibinaires particuliers

Partie A

1. $n_1=\mathrm{HA}_{(bibi)}=16^0=1$ $n_2=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}=16^1+16^0=17$ $n_3=\mathrm{HAHAHA}_{(bibi)}=16^2+16^1+16^0=273$

2. $n_2=16+1=16\times n_1+1$ $n_3=16^2+16+1=16\times(16+1)+1=16\times n_2+1$

3. a) $n_{p+1}=\mathrm{HA}_{(bibi)}\times 16^{p+1}+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times 16^p+\ldots\ldots\mathrm{HA}_{(bibi)}\times 16^1+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times 16^0$

$n_{p+1}=16\times(\mathrm{HA}_{(bibi)}\times 16^p+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times 16^{p-1}+\ldots\mathrm{HA}_{(bibi)}\times 16^0)+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times 16^0=16\times n_p+1$

b) $v_{p+1}=16v_p$ ssi $n_{p+1}-\alpha=16\times(n_p-\alpha)$ ssi $16n_p+1-\alpha=16n_p-16\alpha$

donc ssi $1+15\alpha=0$ donc $\alpha=\frac{-1}{15}$

c) $n_p = v_1 \times 16^{p-1} + \alpha = (n_1 + \frac{1}{15}) \times 16^{p-1} - \frac{1}{15} = (1 + \frac{1}{15}) \times 16^{p-1} - \frac{1}{15} = \frac{16}{15} \times 16^{p-1} - \frac{1}{15} = \frac{1}{15}(16^p - 1)$

Partie B

1. a) $(1+x+x^2)(1-x+x^2) = 1-x+x^2+x-x^2+x^3+x^2-x^3+x^4 = 1+x^2+x^4$

b) $\mathrm{HAHAHA}_{(bibi)} = 16^2+16^1+1$

$\mathrm{HOHAHOHAHOHA}_{(bibi)} = 16^4+16^2+1$

en utilisant l'égalité démontrée en a) avec x=16 , on a

$1+16^2+16^4 = (1+16+16^2)(1-16+16^2)$

donc $\mathrm{HOHAHOHAHOHA}_{(bibi)}$ est divisible par $\mathrm{HAHAHA}_{(bibi)}$

2. non pas pour p=2 : $\mathrm{HOHAHOHA}_{(bibi)} = 33$ *et* $\mathrm{HAHA}_{(bibi)} = 17$ *et 33 n'est pas divisible par 17*

Exercice 3 : non spécialité

I Ecriture binaire

$0=0\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 0000 $1=0\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ donne 0001

$2=0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$ donne 0010 $3=0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ donne 0011

$4=0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 0100 $5=0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ donne 0101

$6=0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$ donne 0110 $7=0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ donne 0111

$8=1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 1000 $9=1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ donne 1001

$10=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$ donne 1010 $11=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ donne 1011

$12=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 1100 $13=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ donne 1101

$14=1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$ donne 1110 $15=1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ donne 1111

II En route vers le bibinaire

1. 11 s'écrit 1011 donc $\mathrm{KI}_{(bibi)}$ 03 s'écrit 0011 donc $\mathrm{HI}_{(bibi)}$

2020 s'écrit $\mathrm{BIDEBO}_{(bibi)}$ 11/03/2020 s'écrit $\mathrm{KI}_{(bibi)}$ / $\mathrm{HI}_{(bibi)}$ / $\mathrm{BIDEBO}_{(bibi)}$

HO	HA	HE	HI	BO	BA	BE	BI	KO	KA	KE	KI	DO	DA	DE	DI
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2. a) $\mathrm{KADO}_{(bibi)}$: $\mathrm{KADO}_{(bibi)}$ = $\mathrm{KA}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^0$ s'écrit $9\times16^1+12\times16^0=156$

$\mathrm{DEBIBI}_{(bibi)}$: $\mathrm{DEBIBI}_{(bibi)}$ = $\mathrm{DE}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^0$

= $14\times16^2+7\times16^1+7\times16^0=3703$

b. $\mathrm{KADODEBIBI}_{(bibi)}$

$\mathrm{KA}_{(bibi)}\times16^4+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^3+\mathrm{DE}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^0$ soit

$156\times16^2+3703$ ou $9\times16^4+12\times16^3+14\times16^2+7\times16^1+7\times16^0=642\ 679$

3. a. $\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$

$\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$ = $10+6=16=1\times16^1$ donc $\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{DE}_{(bibi)}=\mathrm{HAHO}_{(bibi)}$

$\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$

$\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}=15+6=16+5=1\times16^1+5\times16^0=\mathrm{HABA}_{(bibi)}$ donc

$\mathrm{HAHO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}=1\times16^1+0\times16^0+1=1\times16^1+1\times16^0=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}$

donc $\mathrm{HAHO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}$

b. $\mathrm{KEDI}_{(bibi)}+\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{KE}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{DI}_{(bibi)}\times16^0+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^0$

$= (\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)})\times16^1+(\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)})\times16^0$

$= \mathrm{HAHO}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{HABA}_{(bibi)}\times16^0$

$= \mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^2+(\mathrm{HO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)})\times16^1+\mathrm{BA}_{(bibi)}\times16^0$

donc $\mathrm{KEDI}_{(bibi)}+\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{HAHABA}_{(bibi)}$

4.

a. $\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}=12\times6=72=4\times16+8$ donc $\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}=\mathrm{BOKO}_{(bibi)}$

b. $\mathrm{DODO}_{(bibi)}\times\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=(\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^0)\times(\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^0)$

donc $\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^2+(\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)})\times16^1+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^0$

ce qui est égal à $(4\times16+8)\times16^2+(2\times(4\times16^1+8))\times16^1+(4\times16^1+8)\times16^0$

$4\times16^3+8\times16^2+8\times16^2+16\times16^1+4\times16^1+8\times16^0=4\times16^3+16\times16^2+16^2+4\times16^1+8\times16^0$

donc égal à $5\times16^3+1\times16^2+4\times16^1+8\times16^0$

donc $\mathrm{DODO}_{(bibi)}\times\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{BAHABOKO}_{(bibi)}$

III. Nombres bibinaires particuliers

a. $HOHAHOHAHOHA_{(bibi)}$ = $\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^4+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^0=65793$

$HAHAHA_{(bibi)}$ = $16^2+16^1+16^0=273$

$65793:273=241$

b. $241=15\times16+1=\mathrm{DIHA}_{(bibi)}$

donc $\mathrm{HOHAHOHAHOHA}_{(bibi)}=\mathrm{HAHAHA}_{(bibi)}\times\mathrm{DIHA}_{(bibi)}$

2. $\mathrm{BOBOBOBO}_{(bibi)}=\mathrm{BO}_{(bibi)}\times16^3+\mathrm{BO}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{BO}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BO}_{(bibi)}\times16^0$

$= 4\times16^3+4\times16^2+4\times16^1+4\times16^0=17476$

$\mathrm{HAKA}_{(bibi)}=\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{KA}_{(bibi)}\times16^0=16+9=2$ 5

$17476=699\times25+1$

$1=\mathrm{HA}_{(bibi)}$ pour le reste

$699=2\times16^2+11\times16+11=\mathrm{HEKIKI}_{(bibi)}$ pour le quotient

donc $\mathrm{BOBOBO}_{(bibi)}=\mathrm{HEKIKI}_{(bibi)}\times\mathrm{HAKA}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}$