Académie Orléans-Tours

Olympiades Académiques de Mathématiques

Classe de Première

Mercredi 24 Mars 2004

Durée : 4 heures.

L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
L'usage des calculatrices est autorisé.

Exercice 1

On définit pour chaque couple de réels (a, b) la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x+b}.$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels (a, b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2. Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3. À quelle condition deux <u>entiers</u> u et v sont-ils échangeables ?

Corrigé de l'exercice 1

1. On cherche a et b tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} a-\sqrt{2+b} & = & 3 \\ a-\sqrt{3+b} & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-3 & = & \sqrt{2+b} \\ a-2 & = & \sqrt{3+b} \end{array}\right.$

   $\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (a-3)^2 & = & 2+b \\ (a-2)^2 & = & 3+b \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (a-3)^2 & = & 2+b \\ (a-2)^2-(a-3)^2 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow (a, b) = (3, -2).$

   Et on vérifie que $f : x \mapsto 3 - \sqrt{x-2}$ échange bien 2 et 3.

2. On résout de même : $\left\{\begin{array}{rcl} a-\sqrt{4+b} & = & 7 \\ a-\sqrt{7+b} & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-7 & = & \sqrt{4+b} \\ a-4 & = & \sqrt{7+b} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (a-7)^2 & = & 4+b \\ (a-4)^2 & = & 7+b \end{array}\right. \Rightarrow$

   $\left\{\begin{array}{rcl} (a-7)^2 & = & 4+b \\ (a-4)^2-(a-7)^2 & = & 3 \end{array}\right. \Rightarrow (a, b) = (6, -3)$

   Mais ce couple ne convient pas puisqu'alors $\sqrt{4+b} = 1$ est différent de $(a-7) = -1$.

3. Soient m et n deux entiers distincts.

   Ils sont échangeables lorsque le système : (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} a-n & = & \sqrt{b+m} \\ a-m & = & \sqrt{b+n} \end{array}\right.$ admet une solution.

   Or $(S) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (a-n)^2 & = & b+m \\ (a-m)^2 & = & b+n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & (a-n)^2 \\ (2a-n-m)(m-n) & = & m-n \end{array}\right.$

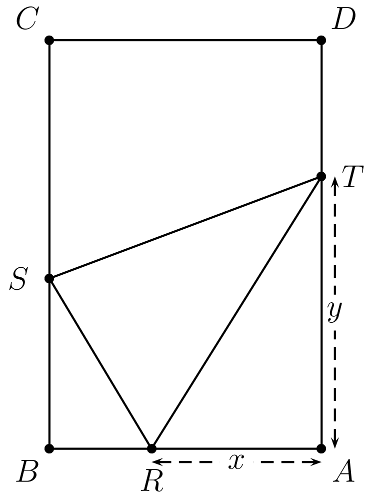
$\underset{\text{car } m\neq n}{\Longrightarrow} 2a-n-m=1 \Rightarrow a=\dfrac{m+n+1}{2}$

On obtient alors une unique solution pour (S) si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcccl} a-n & = & \dfrac{m-n+1}{2} & \geqslant & 0 \\ a-m & = & \dfrac{-m+n+1}{2} & \geqslant & 0 \end{array}\right. \text{ soit lorsque } m-1\leqslant n\leqslant m+1.$$

Ainsi, les entiers m et n sont échangeables si et seulement si ils sont consécutifs. De plus, c'est la fonction $f : x\mapsto n+1-\sqrt{x-n}$ qui échange n et $n+1$.

Exercice 2



Soit $ABCD$ une feuille de papier rectangulaire de largeur $AB=4$ et de longueur $BC=6$.
Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille).
On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille).
Voir figure ci-contre.
Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille).
On pose $AR=x$ et $AT=y$.

1. Trouver les valeurs minimale et maximale de x.
2. Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.
3. Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?

Exercice 3

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer qu'avec un choix judicieux de $+$ ou de $-$ à la place des $\pm$, on peut obtenir :

$$\pm 1\pm 2\pm 3\pm\cdots\cdots\cdots\pm 99\pm 100=2004$$

3. Déterminer tous les entiers n pour lesquels on peut obtenir, selon le même principe :

$$\pm 1\pm 2\pm 3\pm\cdots\cdots\cdots\pm 99\pm 100=n$$

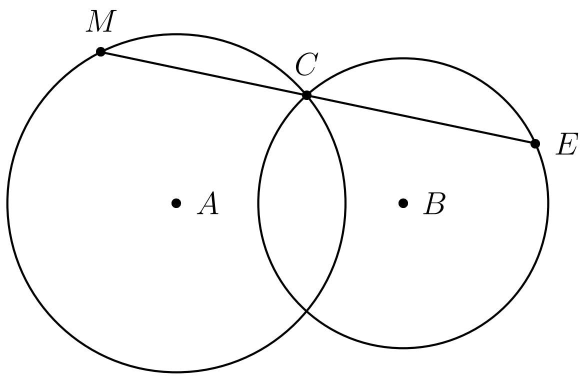
Corrigé de l'exercice 3

1. On pose $S = 1 + 2 + ... + n$. On a alors
$$\begin{array}{rcccccccccccc} 2S & = & (1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n) & + \\ & & (n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1) & \\ & = & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 & \end{array}$$
en ajoutant terme à terme dans les parenthèses.
Ainsi, $2S = n(n+1)$ d'où le résultat.
2. Quelques remarques préliminaires :
   - si l'on affecte un + à chaque entier entre 1 et 100 on obtient une somme égale à +5050
   - si l'on modifie un signe + en un signe − sur un entier k , celà revient à retrancher $2k$ à la somme (et inversement si l'on modifie un signe − en un signe +, à ajouter $2k$)
   - si l'on affecte un + à chaque entier inférieur ou ègal à p et un − aux autres on obtient une somme : $s = 2 \times \frac{p(p+1)}{2} - 5050 = p^2 + p - 5050$ puisqu'il faut alors rajouter $2fois$ chaque entier affecté au préalable d'un −

   Tout d'abord, encadrons 2004 par deux termes consécutifs de la suite
   $p^2 + p - 5050$. On a :
$$83^2 + 83 - 5050 = 1922 < 2004 < 84^2 + 84 - 5050 = 2090$$
   Donc si l'on affecte un + aux 84 premiers et un − aux autres on se trouve à 2090 et il faudra retrancher 86=2×43 pour obtenir le résultat : il suffira donc de transformer le − devant le 43 en un +
   d'où la somme
$$2004 = +1 + 2... + .. + 42 - (43) + 44... + 83 + 84 - 85 - 86... - 100$$
3. Il est clair que la plus grande somme possible est égale à 5050 (que des +) et la plus petite égale à −5050 (que des −)
   Notons que le fait de changer un + en un moins consiste à retrancher à la somme un nombre pair , donc toute somme possible sera forcément paire.
   Réciproquement, soit S un entier pair compris entre −5050 et 5050. Puisque la fonctions $p \to p(p+1) - 5050$ est croissante sur $[0, 100]$, il existe un seul entier p compris entre 1 et 100 tel que
$$(p-1)^2 + (p-1) - 5050 < S \leq p^2 + p - 5050$$
   Affectons un + aux entiers inférieurs ou égaux à p et un − aux autres : nous obtenons donc une somme égale à : $p^2 + p - 5050$
   La différence $D = (p^2 + p - 5050) - S$ est paire (en effet $2\frac{p(p+1)}{2} - 5050$ est pair) et
$$D < (p^2 + p - 5050) - (p-1)^2 + (p-1) - 5050) = 2p + 2$$
   donc $D/2 \leq p$. on en déduit que l'on peut obtenir S en affectant un + à tous les entiers k compris entre un et p sauf $D/2$ et un − aux autres.
   Conclusion : Les entiers obtenus sont tous les entiers pairs compris entre −5050 et 5050.

Exercice 4

1. Prouver que pour tous réels a et b, $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos(a)\cos(b)$
2. Étant donné un triangle ABC, on note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre A et passant par C et $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre B et passant par C.
   Soit M un point de $\mathscr{C}_1$ distinct de C. La droite (MC) recoupe $\mathscr{C}_2$ en E.
   Construire M pour que le produit des distances $CM \cdot CE$ soit maximum.



Corrigé de l'exercice 4

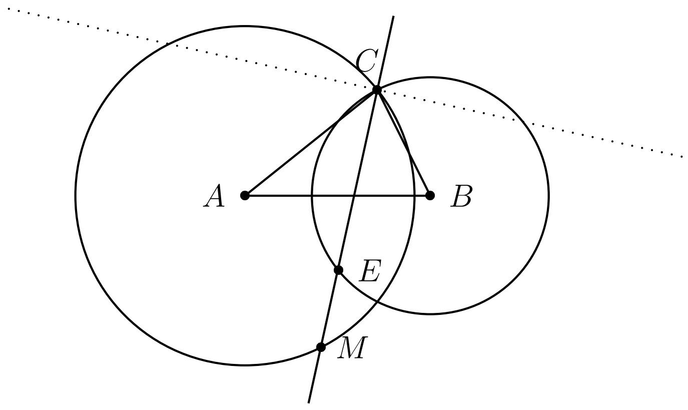
1. Pour tous les réels a et b on a les formules :
   $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
   et $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
   On a ainsi $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos(a)\cos(b)$.
2. Les angles sont orientés tels que $c=(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ soit compris entre 0 et π.
   Soit $a=(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA}})$ avec $a\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$et $b=(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}})$ avec $b\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
   Alors $CM=2AC\cos(a)$ et $CE=2CB\cos(b)$ donc :
   $CM.CE=2AC.CB.(\cos(a+b)+\cos(a-b))$

   Or, d'après la relation de Chasles : $a+b+c=(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CE}})$.
   Plus précisément,
   - si $C\notin[ME]$: $a+b+c=0$ soit $a+b=-c$ et $\cos(a+b)=\cos(c)$ donc $CM.CE$ a une valeur maximale de $m_1=2AC.CB(\cos(c)+1)$, atteinte lorsque $\cos(a-b)=1$ c'est-à-dire lorsque M est sur la bissectrice intérieure de $\widehat{ACB}$;
   - si $C\in[ME]$: $a+b+c=\pi$ soit $a+b=\pi-c$ et $\cos(a+b)=-\cos(c)$ donc $CM.CE$ a une valeur maximale de $m_2=2AC.CB(-\cos(c)+1)$, atteinte lorsque M est sur la bissectrice extérieure de $\widehat{ACB}$.

   Reste à comparer m_1 et m_2. Or $m_1>m_2\Leftrightarrow\cos(c)>-\cos(c)\Leftrightarrow\cos(c)>0$.

Conclusion :

– Si l'angle $\widehat{ACB}$ est aigu, $CM.CE$ est maximum lorsque M appartient à la bissectrice intérieure de $\widehat{ACB}$;



– Si l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus, $CM.CE$ est maximum lorsque M appartient à la bissectrice extérieure de $\widehat{ACB}$;